Oscilovanje poluge izazvano klaćenjem klatna

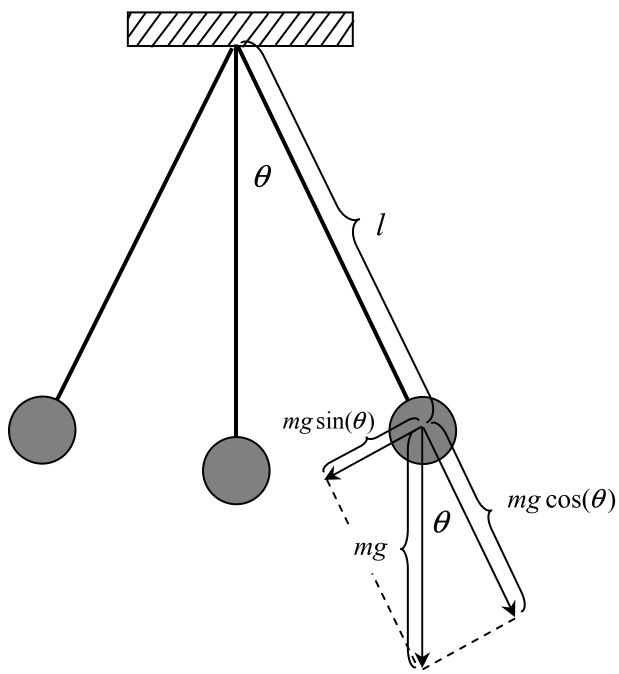
Uvod

Dvokraka poluga na čijem je jednom kraju teg, dok je za drugi kraj vezano klatno, osciluje u prinudnom smislu zbog dopunskog momenta sile koji nastaje usled klaćenja klatna. U principu su moguće i "stepenaste" oscilacije poluge, ali za izbor masa na kracima poluge i izbor kraka sile i kraka tereta, do spontanih oscilacija ne dolazi.

U prvom delu biće izložena teorija matematičkog klatna, a zatim će svi rezultati biti iskorišćeni za rešavanje osnovnog problema: oscilovanja poluge usled oscilovanja klatna.

1. Klaćenje matematičkog klatna

Klaćenje klatna pod uticajem aktivne komponente težine tega:



Slika 1

Jednačina klaćenja klatna je:

$$m\ddot{s} = -mg\sin(\theta), \qquad s = l\theta \tag{1}$$

Dalje sledi:

$$\begin{aligned} ml\ddot{\theta} &= -mg\sin(\theta) \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Pretpostavlja se da su oscilacije male pa se uzima aproksimacija:

$$\sin(\theta) \approx \theta \tag{3}$$

Na tan način, diferencijalna jednačina (2) postaje:

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \sin(\theta) = 0\,,\ \ \Omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{4}$$

Jednačinu (4) ćemo rešavati za granične uslove:

$$\theta(0) = 0,\ \ \theta(\frac{\pi}{2\Omega}) = \theta_0 \tag{5}$$

U domenu malih oscilacija koji se istražuje može se uzeti da je $\theta_0 = \frac{\pi}{6} = 0.523$, jer je $m\frac{\pi}{6} = 0.5$, pa je aproksimacija (3) dobra.

Rešenje jednačine (4) je:

$$\theta(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) \tag{6}$$

Odavde:

$$\theta(0) = 0 = A,\ \ \theta(\frac{\pi}{2\Omega}) = A\cos(\frac{\pi}{2}) + B\sin(\frac{\pi}{2}) = B = \theta_0 \tag{7}$$

pa je,

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\Omega t) = \theta_0 \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \tag{8}$$

Period oscilovanja je:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9}$$

pa se (8) može prikazati i u obliku:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t) \tag{10}$$

Na kraju ćemo naći brzinu oscilovanja i srednju vrednost njenog kvadrata. Na ovaj način može se odrediti srednja centrifugalna sila koja deluje na klatno tokom klaćenja. Diferenciranjem (10) imamo:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{2\pi}{T}\theta_0 \cos(\frac{2\pi}{T}t) \tag{11}$$

Da bi smo dobili tangencijalnu brzinu, množimo ugaonu brzinu sa L pa je:

$$v(t) = l\,\dot{\theta}(t) = \frac{2\pi l}{T}\theta_0 \cos(\frac{2\pi}{T}t)$$

i takođe je:

$$v^2(t) = \frac{4\pi^2 l^2}{T^2}\theta_0{}^2 \cos^2(\frac{2\pi}{T}t) \tag{12}$$

Sledi da je:

$$\bar{v}^2 = \frac{4\pi^2 l^2}{T^2}\theta_0{}^2 \frac{4}{T}\int_0^{T/4}\cos^2(\frac{2\pi}{T}t)dt \tag{13}$$

Pri tome je:

$$\cos^2(\frac{2\pi}{T}t) = \frac{1}{2}(1+\cos(\frac{4\pi}{T}t))$$

Posle smene imamo:

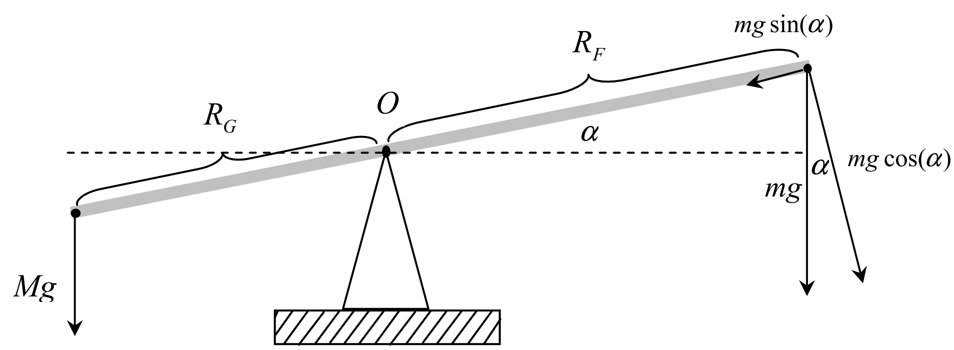
$$\bar{v}^2 = \frac{4\pi^2 l^2}{T^2}\theta_0{}^2 \cdot \frac{4}{T}(\frac{T}{8}+\frac{1}{\pi}\sin(\frac{4\pi}{T}t)\Big|_0^{T/4} = \frac{2\pi^2 l^2}{T^2}\theta_0{}^2 = 2\pi^2 l^2 \theta_0{}^2 \frac{g}{4\pi^2 l^2} = \frac{1}{2}\theta_0{}^2 gl$$

Pošto je centrifugalna sila $\bar{F}_z = m\frac{\bar{v}^2}{l}$, imamo konačno:

$$\bar{F}_z = \frac{1}{2}\theta_0{}^2 mg \tag{13}$$

2. Oscilovanje poluge pod dejstvom klaćenja klatna

U tački A je teg mase *M*, a u tački B je klatno mase *m*.



Slika 2

Prinudne oscilacije poluge mogu da nastanu pod dejstvom momenta sile (vidi sliku 2):

$$M = mgR_F\cos(\alpha) \tag{14}$$

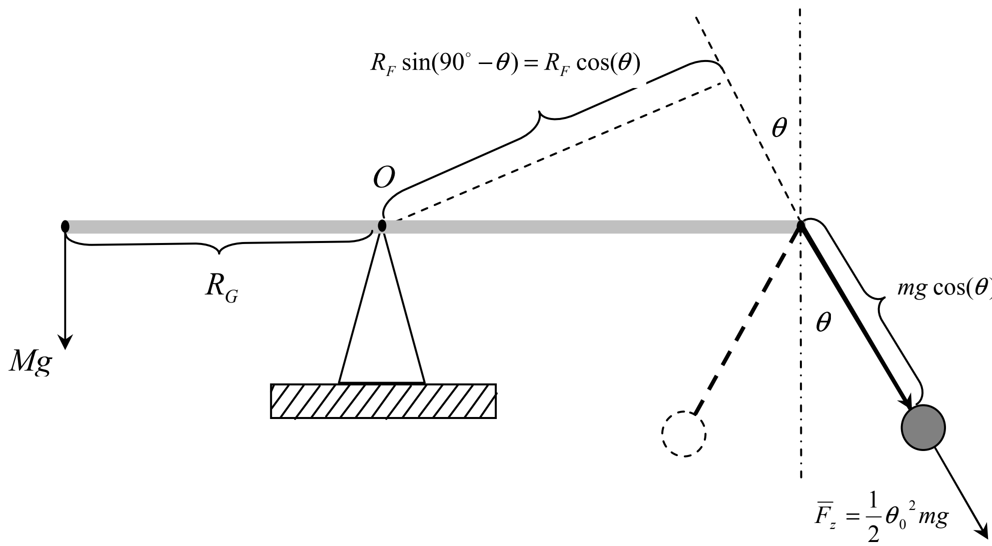
Jednačina slobodnih oscilacija bila bi:

$$J\ddot{\alpha} + mgR_F\cos(\alpha) = 0 \tag{15}$$

gde je *J* moment inercije dela poluge OAC. U daljem tekstu ćemo približno uzimati:

$$J = mR_F{}^2 \tag{16}$$

Klatno klaćenjem stvara dopunski moment sile.



Slika 3

Dobija se moment sile usled klaćenja klatna kao na slici gde je sila $mg\cos(\theta)$ i $\overline{F}_z$ je:

$$\mu_{ad} = (mg\cos(\theta) + \overline{F}_z)R_F \sin(90^\circ - \theta) = (mg\cos^2(\theta) + \frac{1}{2}\theta_0{}^2 mg\cos(\theta))R_F$$

Ukupni moment sile koji deluje zbog klaćenja klatna je:

$$\mu_{TOT} = MgR_G - \mu_{ad} = MgR_G (mg\cos^2(\theta) + \frac{1}{2}\theta_0{}^2 mg\cos(\theta))R_F$$

Tom jednačinom prinudnog oscilovanja poluge (do prinude dolazi usled oscilacija klatna) imamo:

$$J\ddot{\alpha} + mgR_F\cos(\alpha) = MgR_G - mgR_F\cos^2(\theta) - \frac{1}{2}\theta_0{}^2 mgR_F\cos(\theta)$$

odnosno:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgR_F}{J}\cos(\alpha) = \frac{MgR_G}{J} - \frac{mgR_F}{J}\cos^2(\theta) - \frac{1}{2}\theta_0{}^2\frac{mgR_F}{J}\cos(\theta) \qquad (17)$$

Dalje će biti korišćen niz aproksimacija. Ako se uzme aproksimacija (16), onda (17) postaje:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{R_F}\cos(\alpha) = \frac{M}{m}g\frac{R_G}{R_F{}^2} - \frac{g}{R_F}\cos^2(\theta) - \frac{1}{2}\theta_0{}^2\frac{g}{R_F}\cos(\theta) \qquad (18)$$

Sledeća serija aproksimacija sledi na osnovu činjenice da su uglovi α i θ mali.
Uzećemo:

$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \approx 1; \quad \cos^2(\theta) \approx (1 - \frac{1}{2}\theta^2)^2 \approx 1 - \theta^2; \ \cos(\theta) \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \qquad (19)$$

Uvrstimo (18) u (19) pa imamo:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{R_F} + \frac{g}{R_F}\frac{M}{m}\frac{R_G}{R_F} - \frac{g}{R_F} - \frac{\theta_0{}^2}{2}\frac{g}{R_F} + \frac{g}{R_F}\theta^2 + \frac{1}{2}\theta_0{}^2\frac{g}{R_F}\frac{1}{2}\theta^2$$

ili:

$$\ddot{\alpha} = \frac{g}{R_F}(1 + \frac{1}{4}\theta_0{}^2)\theta^2 - \frac{g}{R_F}(2 + \frac{\theta_0{}^2}{2} - \frac{M}{m}\frac{R_G}{R_F}) \tag{20}$$

Dalje je, na osnovu (9):

$$\theta^2 = \theta_0{}^2 \sin^2(t\sqrt{\frac{g}{l}}) \tag{21}$$

Uvrstimo ovo u (20) pa imamo:

$$\ddot{\alpha} = \frac{g}{R_F}\theta_0{}^2(1 + \frac{1}{4}\theta_0{}^2)\sin^2(t\sqrt{\frac{g}{l}}) - \frac{g}{R_F}(2 + \frac{\theta_0{}^2}{2} - \frac{M}{m}\frac{R_G}{R_F}) \tag{22}$$

Jednačina (22) se integrali po vremenu uz početne uslove:

$$\alpha(0) = \alpha_0, \dot{\alpha}(0) = \alpha_0 \tag{23}$$

Tako dobijamo:

$$\dot{\alpha}(t) = -\theta_0{}^2(1 + \frac{1}{4}\theta_0{}^2)\frac{\sqrt{gl}}{4R_F}\sin(2t\sqrt{\frac{g}{l}}) - \frac{g}{R_F}(2 - \frac{M}{m}\frac{R_G}{R_F} - \frac{\theta_0{}^4}{8})t \tag{24}$$

Posle još jedne integracije po vremenu dobijamo:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{\theta_0{}^2 l}{8R_F}(1 + \frac{1}{4}\theta_0{}^2)\cos(2t\sqrt{\frac{g}{l}}) - \frac{g}{2R_F}(2 - \frac{\theta_0{}^4}{8} - \frac{M}{m}\frac{R_G}{R_F})t^2 \tag{25}$$

Konačno ćemo uzeti:

$$\frac{g}{2R_F}t^2 = (t\sqrt{\frac{g}{2R_F}})^2 \approx \sin^2(t\sqrt{\frac{g}{2R_F}}) \tag{26}$$

Radi uprošćneg računa uzećemo da je:

$$2R_F = l;\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{27}$$

uz uslov:

$$\alpha(t) - \alpha_0 = \frac{\theta_0{}^4}{4}(1 + \frac{1}{4}\theta_0{}^2)\cos(2\omega t) - (2 - \frac{M}{m}\frac{R_G}{R_F} - \frac{\theta_0{}^4}{8})\sin^2(\omega t) \tag{28}$$

Pošto je:

$$\cos(2\omega t) = \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) = 1 - 2\sin^2(\omega t) \tag{29}$$

Sledi:

$$\alpha(t) - \alpha_0 = \frac{\theta_0{}^2}{4}(1 + \frac{1}{4}\theta_0{}^2) - (2 - \frac{1}{2}\frac{M}{m}\frac{R_G}{l} + \frac{\theta_0{}^2}{2})\sin^2(t\sqrt{\frac{g}{l}}) \tag{30}$$

Funkcija $\alpha(t) = \alpha_0$ ima nule koje su:

$$\sin^2(t\sqrt{\frac{g}{l}}) = \frac{1}{4}\frac{\theta_0^{\ 2}(1+\frac{1}{4}\theta_0^{\ 2})}{2+\frac{\theta_0^{\ 2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{M}{m}\frac{R_G}{l}}$$

$$\sin(t\sqrt{\frac{g}{l}}) = \frac{\theta_0}{2}\sqrt{\frac{(1+\frac{1}{4}\theta_0^{\ 2})}{2+\frac{\theta_0^{\ 2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{M}{m}\frac{R_G}{l}}}$$

Konačno, nule su:

$$t_K = \frac{\arcsin\left(\frac{\theta_0}{2}\sqrt{\frac{(1+\frac{\theta_0^{\ 2}}{4})}{2+\frac{\theta_0^{\ 2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{M}{m}\frac{R_G}{l}}}\right)}{\sqrt{\frac{g}{l}}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}k, \quad k = 0,1,2...$$

U trenucima t_K je $\alpha(t)-\alpha_0 = 0$ i teg udari o polugu.

Numerika:

$l = 0.4m$ $\qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 4.9523$

$R_G = 0.2m$ $\qquad M = m$ $\qquad \frac{M}{2m}\frac{R_G}{R_F} = \frac{0.1}{0.8} = 0.125$

$\frac{\theta_0^{\ 2}}{2} = 0.2618$ $\qquad \frac{\theta_0^{\ 2}}{4} = 0.0685$

$1+\frac{\theta_0^{\ 2}}{4} = 1.0865$ $\qquad 2+\frac{\theta_0^{\ 2}}{2}-\frac{M}{2m}\frac{R_G}{R_F} = 2.0121$

$\frac{\theta_0}{2} = 0.2618$ $\qquad X = \frac{\theta_0}{2}\sqrt{\frac{1+\frac{\theta_0^{\ 2}}{4}}{2+\frac{\theta_0^{\ 2}}{2}-\frac{M}{2m}\frac{R_G}{R_F}}} = 0.1908$

$\arcsin(X) = 0.192$

$$\boxed{t_K = 0.0425 + 0.6345k \quad k = 1,3,5...}$$

$t_0 = 0.0425$

$t_1 = 0.6770$

$t_2 = 1.3115$

$t_3 = 1.9460$

$t_4 = 2.5805$

$t_5 = 3.2150$

$t_6 = 3.8495$

$t_7 = 4.4850$

$t_8 = 5.1185$

$t_9 = 5.7530$

$t_{10} = 6.3875$

$t_{11} = 7.0220$

$t_{12} = 7.6565$

$t_{13} = 8.2910$

$t_{14} = 8.9255$

$t_{15} = 9.5600$

$t_{16} = 10.1945$

$t_{17} = 10.8290$

$t_{18} = 11.4635$

$t_{19} = 12.0980$

$t_{20} = 12.7325$

$t_{21} = 13.3670$

$t_{22} = 14.0015$

$t_{23} = 14.6360$

$t_{24} = 15.2705$

$t_{25} = 15.9050$

$t_{26} = 16.5395$

$t_{27} = 17.1740$

$t_{28} = 17.8085$

$t_{29} = 18.4430$

$t_{30} = 19.0775$

$t_{31} = 19.7120$

U Novom Sadu, 2000. godine

Akademik prof. dr Bratislav Tošić